

Exercice 1.

Donner la négation des assertions suivantes.

- (1) Tout triangle rectangle possède un angle droit.
- (2) Dans toutes les fermes, toutes les vaches sont noires.
- (3) Pour tout entier x , il existe un entier y tel que, pour tout entier z , la relation $z < x$ implique le relation $z < x + 1$.
- (4) $\forall \epsilon > 0 \exists \alpha > 0 \left(|x - \frac{7}{5}| < \alpha \implies |5x - 7| < \epsilon \right)$.

Exercice 2.

- (1) Montrer que $\neg(P \Rightarrow Q) \Leftrightarrow (P \wedge (\neg Q))$.
- (2) Montrer que $((P \Rightarrow Q) \wedge (Q \Rightarrow R) \wedge (R \Rightarrow P)) \implies ((P \Leftrightarrow Q) \wedge (P \Leftrightarrow R) \wedge (Q \Leftrightarrow R))$.

Exercice 3.

Répondre par Vrai ou Faux aux propositions suivantes. Puis donner la négation dans le cas Faux.

- (1) $x \neq y$ et $a \neq b \implies x + a \neq y + b$.
- (2) $\forall x \in \mathbb{R}, \exists y \in \mathbb{R}$ tel que $x \leq y$.
- (3) $\exists x \in \mathbb{R}, \forall y \in \mathbb{R}$ tel que $x \leq y$.
- (4) La partie entière de x est le plus grand entier relatif inférieur ou égal à x .
- (5) $E(3, 5) = 4, E(-3, 5) = 4, E(-3, 5) = -3, E(5) = 4$.
- (6) Entre deux naturels distincts on peut trouver un autre naturel.
- (7) Entre deux rationnels distincts on peut trouver un autre rationnel.
- (8) $\text{Max}(x, y) \geq x$ et y . $\text{Min}(x, y) \geq x$ et y .
- (9) $\forall x \in \mathbb{N}, \exists y \in \mathbb{N} \mid y > x^2$.
- (10) $\exists x \in \mathbb{N}, \forall y \in \mathbb{N} \mid y > x^2$.
- (11) $\forall (x, y, z) \in \mathbb{Z}^3, x^2 + y^2 = z^2$.

Exercice 4.

Répondre par Vrai ou Faux aux propositions suivantes :

- (1) Si a est un multiple de b et b un multiple de c alors a est un multiple de c .
- (2) Si a est un diviseur de b et b un diviseur de c alors a est un diviseur de c .
- (3) Le nombre de diviseurs communs à 15 et à 39 est fini.
- (4) Le nombre de multiples communs à 15 et à 39 est fini.
- (5) Si a divise b et b divise a alors $a = b$.

- (6) Si a divise b alors $a \leq b$.
- (7) Pour tout $a, b \in \mathbb{Z}$, $\text{pgcd}(a, b)$ divise a et b .
- (8) Un entier n divise les entiers a, b, c si et seulement si n divise $\text{ppcm}(a, b, c)$.
- (9) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $\text{pgcd}(n^2 + n, 2n + 1) = 1$.
- (10) Un nombre est premier si et seulement si ses seuls diviseurs entiers sont 1 et lui-même.
- (11) l'ensemble des nombres premiers est de cardinal fini.
- (12) Si $(x, y) \neq (0, 0)$ alors $x \neq 0$ et $y \neq 0$?
- (13) L'ensemble des vecteurs $\vec{u}(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ tel que $x + 3y - z = 0$ n'est pas vide.
- (14) L'ensemble des vecteurs $\vec{v}(x, y) \in \mathbb{R}^2$ tel que $x^2 + 1 = 0$ est non vide.

Exercice 5.

- (1) Montrer que pour tout $(a, b, q) \in \mathbb{Z}^3$ on a $\text{pgcd}(a, b) = \text{pgcd}(b, a - bq)$.
- (2) Montrer que $E(x + n) = E(x) + n$ pour tout $(x, n) \in \mathbb{R} \times \mathbb{N}$.
- (3) Montrer que si $n^2 - 1$ n'est pas divisible par 8 alors n est pair.
- (4) Montrer que pour tout entier $n \geq 4$ on a $n^2 \leq 2^n$.
- (5) Soit $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction et un point $x_0 \in I$. Donner la négation de la proposition suivante :

$$\forall \epsilon > 0 \exists \eta > 0 \forall x \in I (|x - x_0| < \eta \implies |f(x) - f(x_0)| < \epsilon)$$

Exercice 5.

Les questions de cet exercice sont indépendantes.

- (1) Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a $2n - 1 \leq n! \leq n^n$.
- (2) Calculer le pgcd entre $2^{445} + 7$ et 15.
- (3) Soit $n \in \mathbb{Z}$. Calculer le pgcd entre $n^2 + n$ et $2n + 1$.
- (4) Montrer que l'équation $9x^5 - 12x^4 + 6x - 5 = 0$ n'admet pas de solution entière.
- (5) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer que si n est le carré d'un entier alors $2n$ n'est pas le carré d'un entier.
- (6) Soit $p_1, p_2, \dots, p_r, r$ nombres premiers. Montrer que l'entier $p_1 p_2 \dots p_r + 1$ n'est divisible par aucun des p_i . En déduire l'existence d'une infinité de nombres premiers.
- (7) Soient a et b deux rationnels tels que $a + b$ et $a \times b$ sont des entiers. Montrer que a et b sont des entiers.

Exercice 6.

Ecrire avec des quantificateurs les propositions suivantes.

- (1) Pour tout réel, son carré est positif.
- (2) pour chaque réel on peut trouver un entier relatif tel que leur produit soit strictement plus grand que 1.
- (3) Pour tout entier n il existe un unique réel x tel que e^x égal à n .
- (4) La fonction f est l'identité de $\mathbb{R}$.

- (5) La fonction f n'est pas croissante sur $\mathbb{R}$.
- (6) Pour chaque entier naturel, on peut trouver un entier naturel strictement plus grand.
- (7) Il y a un entier naturel plus grand que tous les entiers naturels.

Exercice 7.

Les questions de cet exercice sont indépendantes.

- (1) Montrer le théorème logique suivant :

$$((P \text{ ou } Q) \implies R) \iff ((P \implies R) \text{ et } (Q \implies R))$$

- (2) Soient $n, m \in \mathbb{N}^*$. Montrer en précisant le mode de raisonnement que $nm = 1 \implies n = 1 = m$
- (3) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer en précisant le mode de raisonnement que $\sqrt{n^2 + 1}$ n'est pas un entier.
- (4) Montrer en précisant le mode de raisonnement que pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a $2^n > n$.

Exercice 8.

Les questions 1., 2. et 3. sont indépendantes.

- 1. Déterminer les entiers relatifs n tels que

a. $\frac{13}{n+2} \in \mathbb{Z}$,

b. $n+4$ divise $2n^2 - n - 8$.

- 2. Montrer par récurrence puis en utilisant les congruences que :

$$\text{pour tout } n \in \mathbb{N}, 5^{2n} + 3 \text{ est divisible par } 4.$$

- 3. a. Montrer que si a et b sont des entiers tels que $a^2 + b^2$ sont impairs, alors a et b sont de parité différente.
- b. Montrer qu'un entier impair n qui est la somme de 2 carrés est de la forme $n = 4k + 1$ où $k \in \mathbb{Z}$.
- c. En déduire qu'un entier de la forme $4k - 1$ ne peut pas être la somme de 2 carrés.
- 3. Soient $(A_i)_{1 \leq i \leq n}$ des sous-ensembles d'un ensemble E . Alors le cardinal de leur réunion est donnée par la formule suivante :

$$\# \left(\bigcup_{i=1}^p A_i \right) = \sum_{k=1}^p (-1)^{k-1} \left[\sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq p} \#(A_{i_1} \cap \dots \cap A_{i_k}) \right]$$

Ecrire en extension cette formule pour $p = 1$ puis pour $p = 4$.

Exercice 9.

- (1) Soient P, Q, R trois propositions. Donner la négation des propositions suivantes.
 - (a) $(P \text{ et } Q) \implies R$.
 - (b) $P \text{ et } (\text{non } (Q) \text{ ou } R)$
- (2) Montrer que les propositions suivantes sont fausses.

(a) $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, (xy \neq 0 \text{ et } x \leq y) \implies \left(\frac{1}{y} \leq \frac{1}{x} \right)$.

$$(b) \exists x \in \mathbb{R}, \left((x \leq 0) \text{ et } \left(\left(\sqrt{x^2} \neq -x \right) \text{ ou } \left((x+1)^2 > x^2 + 1 \right) \right) \right).$$

Exercice 10.

Les questions de cet exercice sont indépendantes.

- (1) Soient $\mathcal{P} = \{2k \mid k \in \mathbb{Z}\}$ et $\mathcal{I} = \{2k+1 \mid k \in \mathbb{Z}\}$. Déterminer $\mathcal{P} \cap \mathcal{I}$.
- (2) Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $x_1, \dots, x_n \in \mathbb{R}^+$. Montrer que

$$\sum_{i=1}^n x_i = 0 \implies x_i = 0, \forall i \in \{1, \dots, n\}.$$

- (3) Soient $x \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}^*$ et $x_1, \dots, x_n \in \mathbb{R}^+$ tel que $\sum_{i=1}^n x_i = x$. Montrer qu'il existe $i \in \{1, \dots, n\}$ tel que $x_i \leq \frac{x}{n}$.
- (4) Montrer que pour entier n , l'entier $10^n - 1$ est divisible par 9.

Exercice 11.

Les questions de cet exercice sont indépendantes.

- (1) Montrer que si n est impair alors 8 divise $7^n + 1$.
- (2) Soient $a, b \in \mathbb{Z}$. Montrer que $a|b$ et $b|a \implies a \in \{-b, b\}$.
- (3) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ on a $(n^3 + 2n) \wedge (n^4 + 3n^2 + 1) = 1$.

Exercice 12.

Les questions de cet exercice sont indépendantes.

- (1) Ecrire la négation des propositions suivantes :
 - (a) Toutes les motos rapides sont noires.
 - (b) Il existe un âne dont au moins un côté est blanc.
- (2) Ecrire à l'aide quantificateur les propositions suivantes :
 - (a) Le carré de tout réel est positif.
 - (b) Etant donné trois réels, il y en a au moins deux de même signe.
 - (c) Entre deux réels distincts, il existe un rationnel.
 - (d) Tous les réels ne sont pas des quotients d'entiers.
- (3) Un rectangle a pour surface $170m^2$. Montrer que sa longueur est supérieure à $13m$.
- (4) Un ensemble $A \subset \mathbb{R}$ est dit *ouvert* s'il vérifie la propriété suivante :

$$\forall x \in A, \exists \epsilon > 0 \text{ tel que }]x - \epsilon, x + \epsilon[\subset A$$
 - (a) Montrer que $]0, 1[$ est un ouvert de $\mathbb{R}$.
 - (b) En utilisant la négation de la définition ci-dessus, montrer que $[0, 1[$ n'est pas un ouvert de $\mathbb{R}$.
 - (c) Quels sont les parties A de $\mathbb{R}$ vérifiant la définition ci-dessus après interversion de $(\forall x \in A)$ et $(\exists \epsilon > 0)$?
- (5) Quel est le reste de la division de $451 \times 6^{43} - 912$ par 7 ?

(6) Soient $a, b \in \mathbb{N}$. Montrer que

$$7 \text{ divise } a \text{ et } b \iff a^2 + b^2 \text{ est multiple de } 7.$$

(7) Montrer par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$, 7 divise $3^{2n+1} + 2^{n+2}$.

(8) Montrer en utilisant les congruences que pour tout $n \in \mathbb{N}$, 7 divise $3^{2n+1} + 2^{n+2}$.

(9) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, 35 divise $3^{6n} - 2^{6n}$.